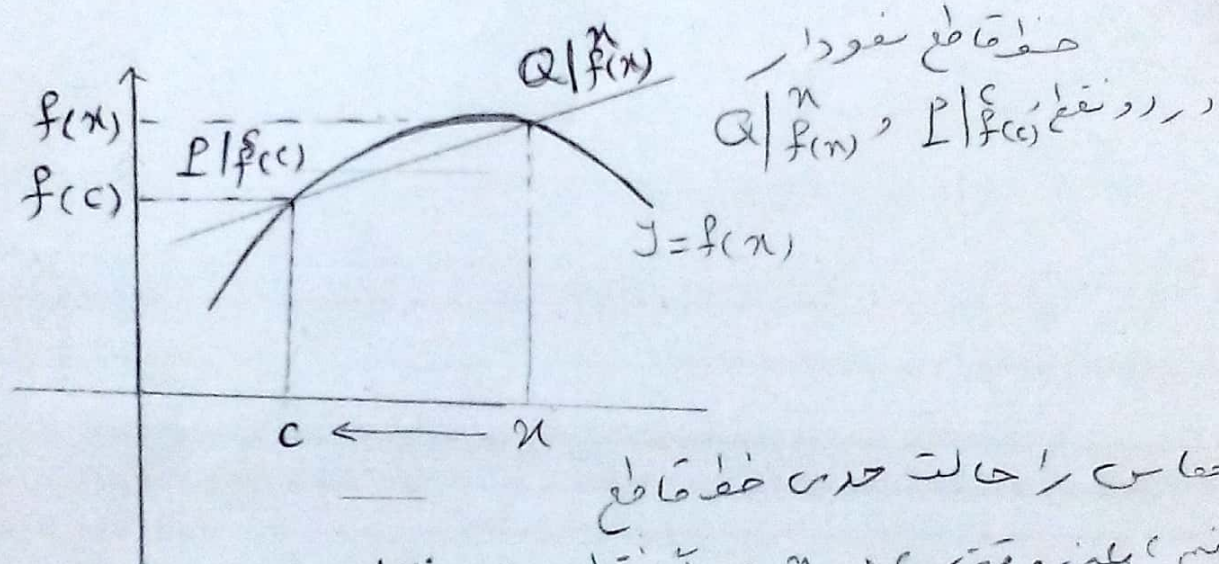
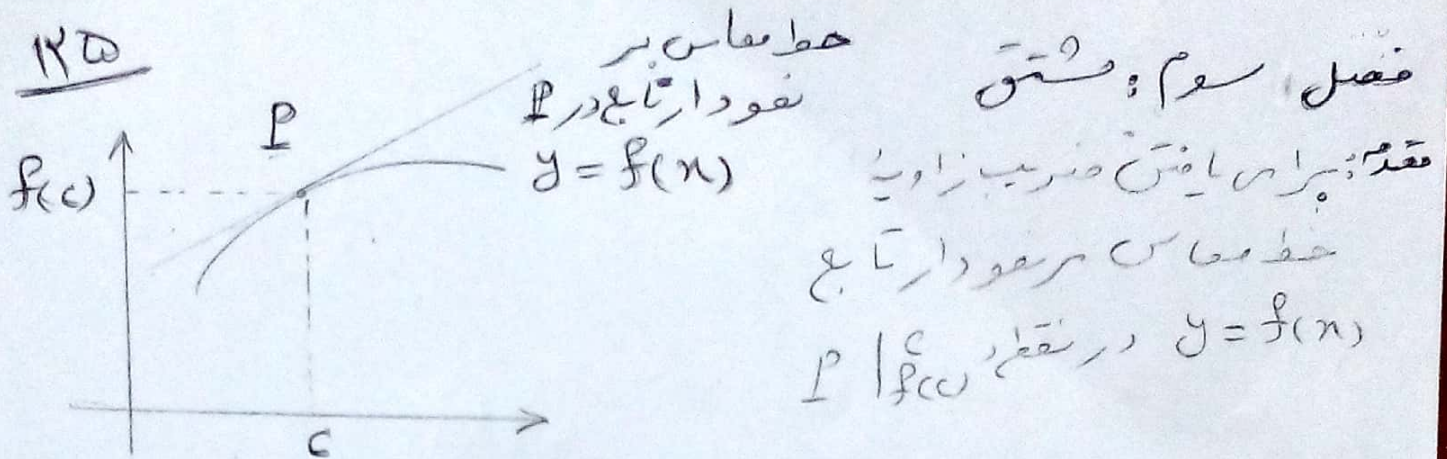


۱۲۵



اگر خط مماس را حالت حدی خط قاطع

فرض کنیم، یعنی وقتی $x \rightarrow c$ عملاً نقطه Q به نقطه P

تزدیک و نیز دایره مماس شود، عملاً خط قاطع نمودار به یک نقطه مماس

تبدیل می شود.

$P | f(c)$ $Q | f(x)$

ضریب فعلی که دو نقطه P و Q را به هم متصل می کند

ضریب فعلی = $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

حالت حدی = $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

وقتی $x \rightarrow c$

و وقتی $x \rightarrow c$ و نقطه Q خدیه P می شود یا به عبارتی $x \rightarrow c$

$\Rightarrow$ ضریب مماس = $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

حد بالا را در صورت وجود مشتق f در c می نامیم و با علامت $f'(c)$ نشان می دهیم و اگر مشتق با c باشد می نویسیم تابع f در $x=c$ مشتق پذیر است.

مثال ۱ در مشتق پذیری توابع زیر (با کمک تعریف) تحقیق کنید.

$$*f(x) = \begin{cases} x^2 \left[\frac{1}{x} \right] & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad , \quad x = 0 \text{ نقطه}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left[\frac{1}{x} \right] - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$$

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq x \times \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1 \Rightarrow f'_+(0) = 1$$

و چون در این حالت $x \rightarrow 0^+$

$$x < 0 \Rightarrow x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) > x \left[\frac{1}{x} \right] \geq x \times \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - x = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1 \Rightarrow f'_-(0) = 1$$

پس f در $x=0$ مشتق پذیر است و $f'(0)=1$.

$$*f(x) = x + \frac{2}{x} \quad , \quad x = -3 \text{ نقطه}$$

$$f'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\left(x + \frac{2}{x} \right) - \left(-3 + \frac{2}{-3} \right)}{x + 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + \frac{2}{x} + 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 8}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)^2}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x} =$$

پس $f'(-3)=0$ و f در $x=-3$ مشتق پذیر است.

تعریف مشتق به این صورت است: نقطه c مشتق پذیر است اگر و فقط اگر یک عدد L وجود داشته باشد که

آن را به f در c معین کنیم. نقطه c مشتق پذیر است اگر و فقط اگر L به حد زیر مشتق f در نقطه c مناسبت داشته باشد.

$$f'(c) = \lim_{n \rightarrow c} \frac{f(n) - f(c)}{n - c}$$

در صورتیکه مشتق f در نقطه c L باشد، L به f در c مناسبت دارد. مشتق f در نقطه c مشتق f در c است و اگر f در c مشتق پذیر باشد، f در c مشتق پذیر است. مشتق f در c $f'(c)$ وجود داشته باشد و f در c مشتق پذیر است. مشتق f در نقطه c موجود است.

مثال: اگر $y = \sin(x)$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است، مشتق y در c $y'(c) = \cos(c)$ است.

حله: اگر c نقطه دلخواه از $\mathbb{R}$ باشد،

$$y' = \lim_{n \rightarrow c} \frac{\sin(n) - \sin(c)}{n - c} = \lim_{n \rightarrow c} \frac{2 \sin\left(\frac{n-c}{2}\right) \cos\left(\frac{n+c}{2}\right)}{n - c} = \lim_{n \rightarrow c} \frac{\sin\left(\frac{n-c}{2}\right)}{\frac{n-c}{2}} \times \lim_{n \rightarrow c} \cos\left(\frac{n+c}{2}\right) = 1 \times \cos\left(\frac{c+c}{2}\right) = \cos(c)$$

$$\lim_{n \rightarrow c} \frac{\sin\left(\frac{n-c}{2}\right)}{\frac{n-c}{2}} \times \lim_{n \rightarrow c} \cos\left(\frac{n+c}{2}\right) = 1 \times \cos\left(\frac{c+c}{2}\right) = \cos(c)$$

$$f'(c) = \cos(c) \quad (c \in \mathbb{R})$$

تمرین: در مشتق به این صورت تعریف شده است: $f'(c) = \lim_{n \rightarrow c} \frac{f(n) - f(c)}{n - c}$

$$f(n) = \begin{cases} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \quad f(n) = \begin{cases} \sqrt{n^2 + n^3} + 1 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \quad f(n) = \begin{cases} n^2 \sin\left(\frac{n^3 + 1}{n}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$f(n) = n^2 - 2n + 2 \quad n = 1$$

$$y = \sqrt[5]{n^3} \quad n = 0$$

$$f(n) = \begin{cases} n^3 \left[\frac{1}{n}\right] & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{n+3}{1-n} \quad n = -2$$

$$y = \sqrt[3]{n-1} \quad n = 1$$

$$y = \frac{8}{\sqrt{n-2}} \quad n = 6$$

$$y = 3|n| + 1 : n = 0 \quad y = \sqrt{-n+4} + 1 : n = 3$$

$$y = \frac{1}{n^2+n-6} : n = 1$$

$$y = n(n-1)(n-2) \dots (n-1000) : n = 0$$

$$y = 5n^2 - 2n \quad R \cup i$$

$$y = |n^3|$$

$$y = \cos(an)$$

تمرین آثر $|f(n)| \leq n^2$ به مقوله است $f(0), f'(0)$

تمرین آثر $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ تابع خاصیت زیر باشد
 $\forall n, y \in \mathbb{R}, f(ny) = f(n) + f(y)$

اولاً، $f(1)$ را تعیین کنید.
 ثانیاً، آثر f در نقطه $a=c$ مشتق پذیر باشد، در $\mathbb{R}$ خط R مشتق پذیر است.

توضیح:

الف) مشتق تابع $y = f(n)$ در نقطه c را با c را در c قرار می دهیم

$$f'(c) = \left. \frac{df}{dn} \right|_{n=c} = \left. \frac{dy}{dn} \right|_{n=c}$$

ب) مشتق تابع $y = f(n)$ در نقطه c را با c را در c قرار می دهیم

$$f'(c) = \lim_{n \rightarrow c} \frac{f(n) - f(c)}{n - c}$$

آثر $c \rightarrow n$ پس $n - c \rightarrow 0$ آثر قرار دهیم
 $n - c = h$ پس $n = h + c$ و داریم

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

مثال آثر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع غیر ثابت خاصیت زیر باشد

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, f(n+y) = f(n) \times f(y)$$

اولاً، $f(1)$ را تعیین کنید.

ثانیاً، آثر f در $n=0$ مشتق پذیر باشد، ثابت کنید f در $\mathbb{R}$ نیز مشتق پذیر است.

$$f(\cdot) = f(\cdot + 0) = f(\cdot) \times f(\cdot)$$

$$\Rightarrow f^2(\cdot) = f(\cdot) \Rightarrow \begin{cases} f(\cdot) = 0 \\ f(\cdot) = 1 \end{cases}$$

اگر $f(\cdot) = 0$ است

$$\forall n \in \mathbb{R}, f(n) = f(n+0) = f(n) \times f(\cdot) = 0 \Rightarrow f = 0$$

اگر $f(\cdot) = 1$ است

$$\begin{aligned} \forall c \in \mathbb{R}, f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) \times f(h) - f(c)}{h} \\ &= f(c) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f(c) \times f'(0) \end{aligned}$$

تعریف مشتق راست و مشتق چپ در یک نقطه
اگر f بر بازه $(c, c+\delta)$ تعریف شده باشد و f در نقطه c مشتق داشته باشد

$$f'_+(c) = f'_+(c^+) = \lim_{n \rightarrow c^+} \frac{f(n) - f(c)}{n - c}$$

مشتق چپ f بر بازه $(c-\delta, c)$ تعریف شده باشد و f در نقطه c مشتق داشته باشد

$$f'_-(c) = f'_-(c^-) = \lim_{n \rightarrow c^-} \frac{f(n) - f(c)}{n - c}$$

واضح است اگر مشتق f در c موجود باشد با توجه به منحصراً بودن آن

$$f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$$

مثال: در مشتق به سیر توابع زیر در نقاط داده شده تحقیق کنید

$$y = \begin{cases} n^2 & n \geq 1 \\ 2n-1 & n \leq 1 \end{cases} \quad y = \sqrt{x^2(n+1)} \quad n=0, y = (n-1)[n] \quad n=1$$

$$y = \begin{cases} n \cos(\frac{\pi}{2}n) & n \geq 1 \\ \frac{n-1}{2-n} & n \leq 1 \end{cases} \quad n=1$$

حل: ابتدا زیر را حل می‌کنیم و مقیاس f و f' را در $n=1$ و $n=0$ محاسبه می‌کنیم

$$f(n) = (n-1)[n] \quad n=1$$

$$f'_+(1) = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{(n-1)[n] - f(1)}{n-1} = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{n-1-0}{n-1} = 1 \quad \begin{matrix} n \rightarrow 1^+ \\ 1 < n < 2 \\ [n] = 1 \Rightarrow \\ f(n) = n-1 \end{matrix}$$

$$f'_-(1) = \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{(n-1)[n] - f(1)}{n-1} = \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{0}{n-1} = 0 \quad \begin{matrix} n \rightarrow 1^- \\ 0 < n < 1 \\ [n] = 0 \Rightarrow \\ f(n) = (n-1) \times 0 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \Rightarrow f(1) \text{ در } n=1 \text{، صورت ندارد.}$$

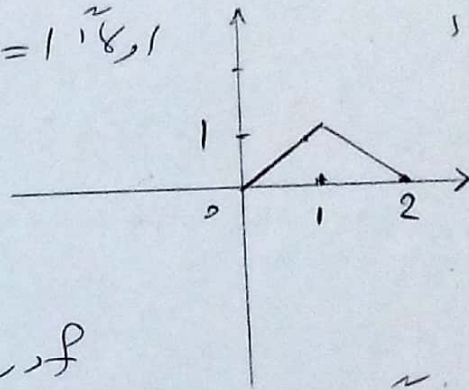
مثال و نمودار تابع $y = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq 1 \\ 2-n & 1 < n \leq 2 \end{cases}$ را رسم کنید و سپس تعیین کنید اولاد.

$$f'_+(1) = \lim_{n \rightarrow 1^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 1^+} (2-n) = 2-1 = 1 \quad \text{اولاد}$$

$$f'_-(1) = \lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 1^-} n = 1$$

$$\Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow 1} f(n) = f(1)$$

در $n=1$ ، صورت دارد



$$f'_+(1) = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{f(n) - f(1)}{n-1} = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{2-n-1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{-(n-1)}{n-1} = -1$$

$$f'_-(1) = \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{f(n) - f(1)}{n-1} = \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{n-1}{n-1} = 1$$

$\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \Rightarrow f(1) \text{ در } n=1 \text{، صورت ندارد.}$
تعیین ولی صورت ندارد.

$$(\sin(n))' = \cos(n)$$

$$(\cos(n))' = -\sin(n)$$

$$(tg(n))' = 1 + tg^2(n) = \frac{1}{\cos^2(n)} = \sec^2(n)$$

$$(ctg(n))' = -(1 + ctg^2(n)) = \frac{-1}{\sin^2(n)} = -\csc^2(n)$$

$$(\sec(n))' = \sec(n)tg(n)$$

$$(\csc(n))' = -\csc(n)ctg(n)$$

$$(\lambda)' = 0 \quad \text{در } \lambda \text{، عدد ثابت}$$

صفا یا به مشتق

①

$$\frac{1}{n} (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = \frac{1}{n} x^{-1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} \Rightarrow (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{2\sqrt[n]{x}} \quad \text{مثلاً}$$

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)' =$$

$$n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

عزیم امثلو است $1+2x+3x^2+\dots+n x^{n-1}$ و $1+2^2 x+3^2 x^2+\dots+n^2 x^{n-1}$ $n=0$ در f متقارن است در این نقطه پیوسته نیست.

مثلاً اینکین کنیم قواعد ریدریم نقاط از R متقارن نیست

$$y = \begin{cases} n & n \in \mathbb{Z} \\ \sin(n) & n \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad y = [x] \quad y = |\cos(x)|$$

حل از آنجا که تابع $y = [x]$ در اعداد صحیح نامتوازی است پس در این نقاط متقارن نیست و در $R - \mathbb{Z}$ برای $n \in \mathbb{Z}$

$$[n] = n \quad n < x < n+1$$

پس متقارن این تابع در $R - \mathbb{Z}$ برابر صفر است زیرا $[x]$ بر $(n, n+1)$ ثابت است

$$\text{در تابع } y = \begin{cases} n & n \in \mathbb{Z} \\ \sin(n) & n \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ این تابع فقط در } n=0 \text{ پیوسته است پس تنها} \\ \left(\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0} n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow 0} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0} \sin(n) = \sin(0) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} f(n) = f(0) \right) \\ \text{در این نقطه ممکن است متقارن نیز باشد} \\ y'(0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(n) - f(0)}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n - 0}{n - 0} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(n) - 0}{n - 0} = 1 \Rightarrow \text{اگر } n \text{ توان باشد}$$

نکته: بیشتر از یکس نقطه این مقیاس در مسائل استفاده می شود

f در $n=0$ متقارن نیست $\Rightarrow$ در $n=0$ پیوسته است

و همچنین قایل ذکر است که عکس این مقیاس لزوماً صحیح نیست.

مثلاً $y = |x|$ در $n=0$ پیوسته است و در این نقطه متقارن نیست.

$$f'_+(0) = \lim_{n \rightarrow +0} \frac{f(n) - f(0)}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow +0} \frac{|n| - 0}{n - 0} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{n \rightarrow -0} \frac{|n| - 0}{n - 0} = -1 \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow \text{تابع در } n=0 \text{ متقارن نیست}$$

تمرین ۱: ثابت کنید تابع $y = \begin{cases} n \sin(\frac{1}{n}) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$ در $n=0$ پیوسته است و در $n=0$ مشتق پذیر نیست.

مثال ۱: تابع $f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^n \cos(\frac{n}{3}\pi n)$ در R پیوسته است و در $n=0$ مشتق پذیر نیست.

مثال ۲: مقادیر a, b را پیدا کنید که f روی R مشتق پذیر باشد.

$$f(n) = \begin{cases} an+b & n > -1 \\ bn^2-3 & n \leq -1 \end{cases}$$

حل ۱: گوییم تابع دو ضابطه ای است و در مناطق $(-1, \infty)$ یک ضابطه ای است، ضابطه $an+b$ را در R مشتق می‌گیریم. کافیست ثابت کنیم این تابع در نقطه $n=-1$ پیوسته است. افعال دو ضابطه برقرار باشد.

$$f'(-1) = (bn^2-3)' \Big|_{n=-1} = 2bn \Big|_{n=-1} = 2b(-1) = -2b$$

$$f'_+(-1) = \lim_{n \rightarrow -1^+} \frac{f(n) - f(-1)}{n - (-1)} = \lim_{n \rightarrow -1^+} \frac{an+b - (b-3)}{n+1} = \lim_{n \rightarrow -1^+} \frac{an+3}{n+1} \quad (*)$$

از طرف دیگر f در $n=-1$ مشتق پذیر است پس طبق قضیه پیوستگی مشتق داریم:

$$f^+(-1) = f(-1) = f^-(-1)$$

$$f^+(-1) = \lim_{n \rightarrow -1^+} an+b = -a+b$$

$$f^-(-1) = \lim_{n \rightarrow -1^-} bn^2-3 = b-3 = f(-1)$$

$$\left. \begin{aligned} -a+b &= b-3 \\ \Rightarrow a &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$(*) \Rightarrow f'_+(-1) = \lim_{n \rightarrow -1^+} \frac{3(n+1)}{n+1} = 3$$

$$\Rightarrow f'_+(-1) = f'(-1) \Rightarrow -2b = 3 \Rightarrow b = -3/2$$

تمرین ۲: مقادیر a, b را پیدا کنید که f در $n=\pi$ مشتق پذیر باشد.

$$y = \begin{cases} \sin(n) & n < \pi \\ an+b & n \geq \pi \end{cases}$$

(۳) چهره مشتق عام و مشتق تابع مرکب

اگر توابع f و g در نقطه a مشتق پذیر باشند آنگاه توابع $f \pm g$ و fg

۱۳۲

f و g (تابع در) مشتق پذیرند داریم،

$$(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$$

$$(f \times g)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - g'(c)f(c)}{g^2(c)}$$

$g(c) \neq 0$

$$(\lambda f)'(c) = \lambda f'(c)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(c) = \frac{-f'(c)}{f^2(c)}$$

دائر f و g و تابع قابل ترکیب باشند به طوریکه f در c و g در $f(c)$ مشتق پذیرند
آنگاه $g \circ f$ در c مشتق پذیر است، داریم،

$$c \xrightarrow{f} f(c) \xrightarrow{g} g(f(c))$$

$g \circ f$

$$\Rightarrow (f(u))' = f'(u) \times u'$$

$$(g \circ f)'(c) = f'(c) \times g'(f(c))$$

۲، مشتق $\cos$ را تعیین کنید.

$$* (\sin(\sqrt{n}))' = \cos(\sqrt{n}) \times (\sqrt{n})' = \cos(\sqrt{n}) \times \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$* (\sin \sqrt{1+\sqrt{n}})' = \cos(\sqrt{1+\sqrt{n}}) \times (\sqrt{1+\sqrt{n}})'$$

$$= \cos(\sqrt{1+\sqrt{n}}) \times \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{n}}} \times (1+\sqrt{n})' = \dots$$

$$\cos(\sqrt{1+\sqrt{n}}) \times \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{n}}} \times \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{\cos \sqrt{1+\sqrt{n}}}{4(\sqrt{n}+\sqrt{n})}$$

تمرین: $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}$ ، $\sqrt{4+\sqrt{4-n}}$ ، $\sin(\cos(tg(n)))$ ، $3n(2n^2-5)^4$

$$tg^2(\sin^3(n))$$

$$(f(n))^n$$

$$\sqrt{1-\sqrt{1-n^2}}$$

$$-1 < n < 1$$

توضیح: برای تعیین $(|f|)'$

$$|f(n)|' = \sqrt{f^2(n)}' = \frac{2 f(n) \times f'(n)}{2\sqrt{f^2(n)}} = f'(n) \times \frac{f(n)}{|f(n)|}$$

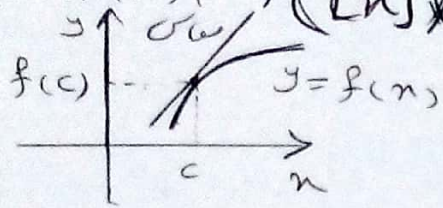
$$|\sin(n)|' = \cos(n) \times \frac{\sin(n)}{|\sin(n)|}$$

۱ و ۲

$$= \begin{cases} \cos(n) & 2k\pi < n < 2k\pi + \pi \\ -\cos(n) & 2k\pi + \pi < n < 2k\pi + 2\pi \end{cases} \quad k=0,1,2,\dots$$

تمرین مقدماتی: $|n^3+1|'$ و $|n^3(n-2)^3(n+2)^2|$, $([n] \sin^2(\pi n))'$

$|\sin^3(n)|'$, $([n] \times |n|)'$ و $(\sin(|n|))'$



تعریف: خط مماس، خط قائم بر نمودار یک منحنی

اگر تابع f در نقطه $n=c$ مشتق پذیر باشد معادله خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه عبارت است از:

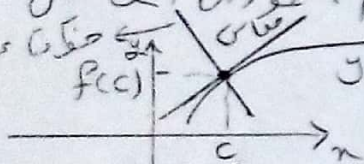
$$y - f(c) = f'(c)(n - c)$$

دائر $f'_+(c) = +\infty$ و $f'_-(c) = -\infty$ بین $f'_+(c)$ و $f'_-(c)$ هر دو در c موجود باشند و $n=c$ خط قائم در این نقطه خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه است.

ممکن است منقوع از خط قائم بر نمودار تابع، خط عمود بر خط مماس تابع در این نقطه است که اگر $f'(c) \neq 0$ باشد معادله خط قائم بر نمودار در این نقطه عبارت است از:

$$y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}(n - c)$$

اگر $f'(c) = 0$ پس خط مماس افقی و در نتیجه خط قائم عمودی است پس خط $n=c$ خط قائم بر نمودار است.



مثال: معادله خط مماس و خط قائم بر نمودار منحنی $y = n^3 - 4n + 1$ در نقطه $C=2$ را تعیین کنید.

$$y = n^3 - 4n + 1 \mid_{n=2} = 8 - 4 \times 2 + 1 = 1$$

$$y' = 3n^2 - 4 \mid_{n=2} = 3 \times 4 - 4 = 8$$

معادله خط مماس و خط قائم

$$y - f(c) = f'(c)(n - c)$$

خط قائم

$$y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}(n - c)$$

معادله خط مماس

$$\Rightarrow y - 1 = 8(n - 2) \Rightarrow y = 8n - 16 + 1 = 8n - 15$$

$$y - 1 = -\frac{1}{8}(n - 2) \Rightarrow y = -\frac{n}{8} + \frac{1}{4} + 1 = -\frac{n}{8} + \frac{5}{4}$$

خط قائم

تمرین ۱: ثابت کنید عمده خطوط مماس بر منحنی $y = \frac{1}{(1-2x)^3}$ هیچ مسبته ندارند

۲- نقاط از نمودار $y = \frac{n^3}{3} - \frac{3}{2}n^2 + 1$ که در آن خط مماس با خط $8n - 2y = 1$ را مشخص کنید.

۳- معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{1}{1+n^2}$ در محل تقاطع با نمودار $y = \frac{1}{1+n}$ را تعیین کنید.

۴- معادله خط مماس بر منحنی $y = n^2 + 4n + 1$ در محل برخورد با محور y را مشخص کنید.

۵- معادله خط مماس و خط مماس بر منحنی $y = n^4 + 3n^2 - 16$ در محل تقاطع با منحنی $y = 3n^2$ را مشخص کنید.

۶- معادله خط مماس بر منحنی $y = n^3$ در نقطه $n = \frac{\sqrt{3}}{3}$ را مشخص کنید.

۷- زاویه بین منحنی $y = \frac{1}{1+n}$ و $y = \frac{1}{1+n^2}$ را تعیین کنید.

۸- معادله خط مماس بر منحنی $y = n^2 + 4n + 1$ که رأس سهمی بر نمودار عمود باشد.

۹- نقاط از منحنی $y = n^3 - 3n + 5$ را تعیین کنید که خط مماس در آنجا در شیب $\frac{1}{2}$ قرار داشته باشد.

الف) معادله خط $y = 2n$ باشد.

ب) عمود بر خط $y = -\frac{n}{9}$ باشد.

ج) زاویه $\frac{\pi}{4}$ باشد.

۱۰- خط مماس بر منحنی $y = \sqrt{n^2 - n} + 7$ در نقطه $n = 2$ را بنویسید.

الف) زاویه بین خط $y = 4 - n$ و $y = 4 - \frac{n^2}{2}$ را مشخص کنید.

ب) زاویه بین دو منحنی $y = \sin(n)$ و $y = \cos(n)$ در نقطه برخورد در یک دوره تناوب.

۱۱- معادله خط مماس بر نمودار توابع زیر را (در صورت وجود) در مبدأ،

$y = |n|$ و $y = \sqrt[3]{n}$ و $y = \sqrt[3]{n^2}$

$y = |n| = \begin{cases} y = n & n \geq 0 \\ y = -n & n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'_{+}(0) = 1, f'_{-}(0) = -1$

و وجود ندارد.

در این نقطه خط $y = n$ مماس است و خط $y = -n$ مماس بر منحنی است.

$y = \sqrt[3]{n} \Rightarrow f'(0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{0}}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = +\infty$

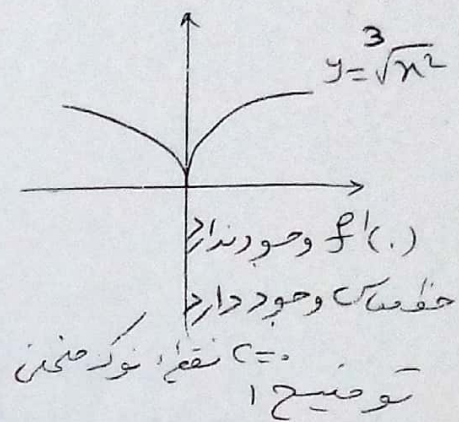
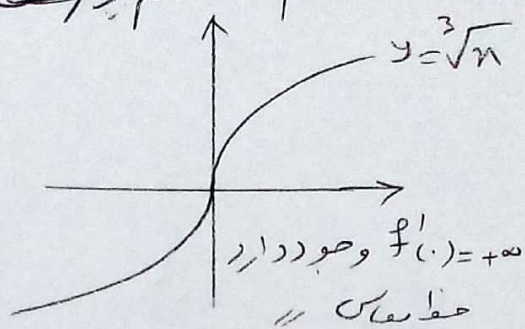
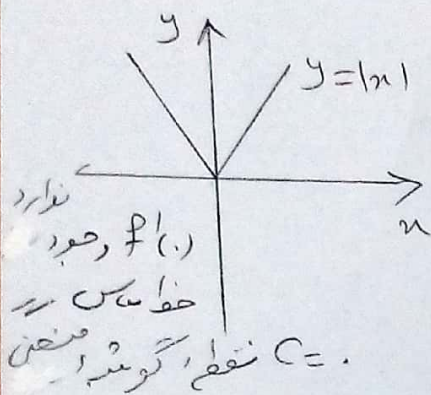
تangent خط مماس نیست و در صورت وجود ندارد.

$n = 0$ یا محور y و $n = 0$ مماس با خط مماس است.

$y = \sqrt[3]{n^2} \Rightarrow f'(0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{0}}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = -\infty$$

$f^{(n)}(x)$ و صورت ندارد زیرا $f^{(n)}(x) \neq f^{(n)}(x)$ و این ضرایب (عوامل) حذف می‌شود.



الف در میان فوق و بینیم ممکن است تا بحال در نقطه ای عشق نیز برپا شود
یا حتی عشق موجود باشد در بعضی دایره ای خاص باشد

۱- اثر $f_+(c)$ ، $f_-(c)$ عدد موجود است و نامبرای c را
نقطه گوشه یعنی همانند باشد $y=|x|$ در مبدأ و اثر $f_+(c)$ و
 $f_-(c)$ عدد موجود و نامبرای c را نامبرای c را
نقطه گوشه یعنی همانند باشد $y=\sqrt[3]{x^2}$ در مبدأ.

تمرین ۱: تعیین کنید تابع $y = n + \sqrt[3]{\sin(n)}$ در چه نقاطی خط مماس عمود بر افق و

مفتی محمد رفیع

در مقام موارد فوق در معانی این فصل متن تابع مراد معادله و حسب
آن بدست آورده ایم.

اما ما هو يا فتى معاذ الله يا عبد الله سخطت و يا عسلا عني ممكن يا سادة بنابرین
خبر ما براتنگ و تا بل عشق پیروزان یا سادة عشق معاذیر ملام و در در رکعت
معاذ و و اعداد است برادر طرف دیگر سادات قرار داده و س راجع ان مانند
یا صفر
راجله زیر مهر سیم
عبدالست

$$f(x, y) = k \rightarrow f(x, y) = 0$$

رایجہ عربیہ و
اعمال عربیہ و

۱۳۷

و سپس به کمک فرمول زیر از رابطه مشتق میگیریم.

$$y' = - \frac{df/dx}{df/dy} = - \frac{f'_x}{f'_y}$$

عین یکبار از فرمول f'_x به x مشتق میگیریم و y را عدد ثابت فرض می‌کنیم و می‌شود f'_x و بطور مشابه یکبار به y از f مشتق میگیریم و x را عدد ثابت در نظر می‌گیریم و می‌شود f'_y ، در این صورت $y' = - \frac{f'_x}{f'_y}$.

مثال: اگر $y^2 = x^2 + \sin(2x^2y^3)$ معادله است y' .

$$y^2 = x^2 + \sin(2x^2y^3) \Rightarrow y^2 - x^2 - \sin(2x^2y^3) = 0 \Rightarrow$$

$f(x, y)$ عین فرمول یا رابطه را می‌نویسیم
بر حسب x و y

$$y' = - \frac{0 - 2x - \cos(2x^2y^3) \times 2y^3 \times 2x}{2y - 0 - \cos(2x^2y^3) \times 2x^2 \times 3y^2} = \frac{x + 2xy^3 \cos(2x^2y^3)}{y - 3y^2x^2 \cos(2x^2y^3)}$$

مثال: معادله خط مماس، خط قائم بر منحنی زیر را در نقطه $(-2, 3)$ تعیین کنید.

$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy + 14 = 8y^2 - 9x$$

$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy + 14 = 8y^2 - 9x \Rightarrow$$

$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x = -14 \Rightarrow$$

رابطه را بر حسب x و y می‌نویسیم $f(x, y) =$

$$y' = - \frac{12x^2 - 3y^2 + 12x - 5y + 0 + 9}{0 - 3x \times 2y + 0 - 5x - 8 \times 2y + 0} = - \frac{12x^2 - 3y^2 + 12x - 5y + 9}{-6xy - 5x - 16y}$$

$$y'(-2, 3) = - \frac{12 \times (-2)^2 - 3 \times 3^2 + 12 \times (-2) - 5 \times 3 + 9}{-6 \times (-2) \times 3 - 5(-2) - 16 \times 3} = - \frac{9}{2}$$

معادله خط مماس بر منحنی

$$y - f(c) = \frac{-1}{f'(c)} (x - c) \quad \text{قائم}$$

معادله خطی است برشود $\Rightarrow y-3 = -\frac{9}{2}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{9}{2}x - 6$

معادله خطی قائم برشود $y-3 = \frac{2}{9}(x+2) \Rightarrow y = \frac{2}{9}x + \frac{31}{9}$

تمرین ۱ مقلوب است معادله زیر:

۱- $y' = 6$ ، $y^4 + x^2 + 2 = 3$

۲- $y' = 6$ ، $\sin(xy) = \frac{1}{2} - \cos(xy)$

۳- معادله خطی است برشود معادله زیر، در نقاط خواسته شده:

در نقطه $(2, 4)$: $x^3 + y^3 = 9xy$

" $(1, 1)$: $x^5 + y^5 = 2xy$

" $(3, -4)$: $x^2 + y^2 = 25$

۴- منحنی $x^3y^3 + y^2 = x + y$ در نقاط $(1, 1)$ و $(-1, +1)$

۵- $y' = y''$ اثر $y = x + \frac{1}{y}$ باشد.

۶- معادله خطی است برشود

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $xy - x + y = -1$, $x^3y - xy^2 + x^2 - 2 = 0$

$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1$, $y - x \sin(y) + 1 = 0$, $\sin(xy) + \cos(x^2y) + 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + y + 4 = 0$, $x^3 + x^2y + y^2 = 0$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

$\ln(x) + e^{-y/x} = k$, $x + y = e^{x-y}$, $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$

$x + y + \sqrt{xy} = k$, $\arctan(y/x) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $e^{x \sin(y)} - e^{\cos(x)} = 0$

$e^x + xy = e$ (۱, ۰) در نقطه , $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$ (۱, ۱) در نقطه

$y^4 + x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 4y^2 + \sin^2(xy) + 12 = 0$

① در روش مشتق گیری منحنی برای محاسبه y علاوه بر مقدار x مقدار y هم احتیاج داریم، در حالی که در مشتق گیری معمولی فقط مقدار x مورد نیاز است.

مثال، مقدار y را خط مماس بر منحنی $y = \sqrt[3]{x}$ را در نقاط داده شده تعیین کنید.

الف، $y = \sqrt[3]{x}$ ، $x=1$

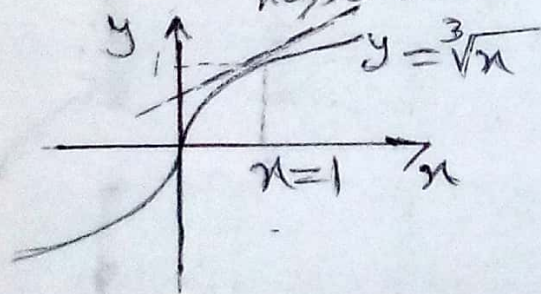
$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

از $c=1$ شروع می‌کنیم

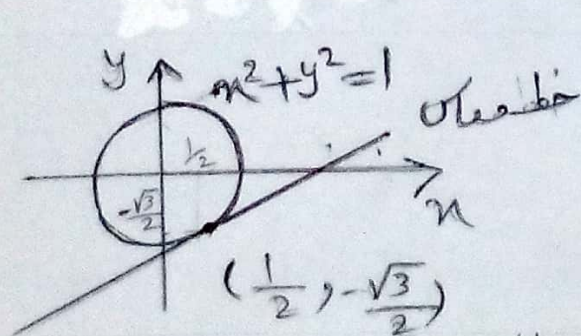
$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3}$$

$$(y = x^{1/3} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-2/3})$$

$$f(c) = \sqrt[3]{1} = 1 \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$



ب، $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$



$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$y' = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y - \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$3x^2 + y^6 + 1 = 0$$

② مثال: معادله $3x^2 + y^6 + 1 = 0$ را با استفاده از روش مشتق گیری حل کنید.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{6x}{6y^5} = -\frac{x}{y^5}$$

$$3n^2 + y^6 + 1 = 0 \Rightarrow 3n^2 + y^6 = -1 \quad \#$$

که غیر ممکن است عیناً معادله این مستوی گرفته ایم که هیچ (n, y) در آن صدق نکرند.

مثال ۱ اگر $\frac{n-y}{n+y} = \frac{n}{y} + 2$ مطلوب است y'

حل ۱

$$\frac{n-y}{n+y} = \frac{n}{y} + 2 \Rightarrow \frac{n-y}{n+y} - \frac{n}{y} - 2 = 0 \Rightarrow$$

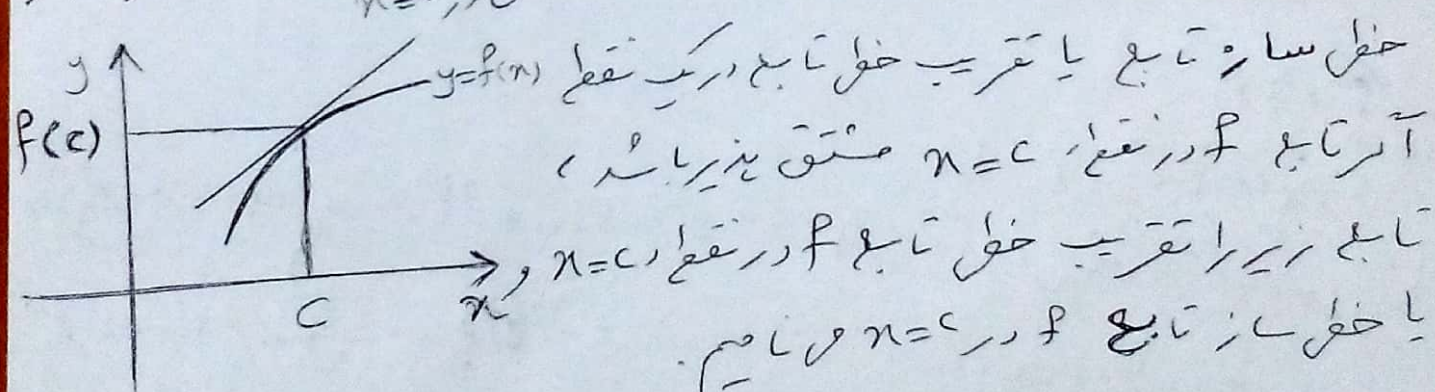
$$\frac{ny - y^2 - n^2 - ny - 2ny - 2y^2}{y(n+y)} = 0 \Rightarrow \frac{-3y^2 - n^2 - 2ny}{y(n+y)} = 0 \Rightarrow$$

$$3y^2 + n^2 + 2ny = 0 \Rightarrow 2y^2 + \frac{(y^2 + n^2 + 2ny)}{(n+y)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(n+y)^2}_{\neq 0} + \underbrace{2y^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} n+y=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow n=y=0$$

در حالیکه $(0,0)$ در معادله

معادله مهم از معادله این مستوی گرفته ایم که هیچ n, y در آن صدق نکرند، بنابراین برای این پس در جایگزینی درج مستوی منحنی باید دقت داشت و احتیاط بیشتر - خرج داد.

حالا معادله در $n=0$ 

که در واقع تابع $y=f(x)$ را با معادله خطی که در نقطه $x=c$ بر خود دارد تابع f معادله خود را تقریب می زنیم، نقاط نزدیک به $x=c$ به عبارت دیگر آنجا که $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ می توان در نزدیکی نقطه $x=c$

۱۴۱

اگر $f'(c)$ به دست آید، در نتیجه،

$$\frac{f(n) - f(c)}{n - c} \sim f'(c) \Rightarrow f(n) \sim f(c) + f'(c)(n - c)$$

مثال: خط مماس از $c=0$ بر $y = \sqrt{1+n}$ را در نقطه $(0, 1)$ بنویسید.

حل: $L(n) = f(c) + f'(c)(n - c)$

اگر $c=0$ را در $f(n) = \sqrt{1+n} \Rightarrow f'(n) = \frac{1}{2\sqrt{1+n}} \Rightarrow$

$f(0) = \sqrt{1+0} = 1, f'(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow L(n) = f(0) + f'(0)(n - 0)$
 $= 1 + \frac{1}{2}n = \frac{n}{2} + 1$

مثال: تقریباً از مقدار زیر برای $\sqrt[3]{7.8}$ استفاده کنید.

* $\sqrt[3]{7.8}$

$f(n) = \sqrt[3]{n}, c = 8$

$L(n) = f(c) + f'(c)(n - c)$

$f'(n) = \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}, f(c) = \sqrt[3]{8} = 2, f'(c) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{7.8} \approx 2 + \frac{1}{12}(7.8 - 8) = 2 + \frac{-0.2}{12} = 2 - \frac{0.1}{6} = 2 - \frac{1}{60}$

* $\cos(47^\circ)$

$f(n) = \cos(n), c = 45^\circ$

$f'(n) = -\sin(n), f(c) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, f'(c) = -\sin(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow f(n) \sim L(n) = f(c) + f'(c)(n - c) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(47^\circ - 45^\circ)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2^\circ)$

$\frac{C}{2\pi} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{2}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{90}$

$\Rightarrow \cos(47^\circ) \sim \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \frac{\pi}{90}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2} \times \pi}{2 \times 90} \Rightarrow \cos(47^\circ) \sim \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7}{30}$

تمرین ۱۴۲: مقدار خطای تابع $y = \cos(n)$ را در $C = \frac{\pi}{2}$ تعیین کنید.
 تمرین ۱: مقدار خطای تقریب از مقدار زیر را تعیین کنید.

$\sqrt{37.5}$ و $\sqrt[4]{82}$ و $\cos(148^\circ)$ و $\sin(31^\circ)$ و $\cot(45^\circ)$ و $\sqrt[5]{33}$ و $\sqrt{101}$
 تمرین ۱: تقریب از تابع $y = \sqrt[5]{\frac{2-n}{2+n}}$ را در نقطه $n = 0.15$ تعیین کنید.

دifferential

تعریف: اگر تابع $y = f(x)$ در بازه I مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(x)$ را مشتق از f می‌گویند.

اگر $f(x)$ در بازه I مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(x)$ را مشتق از f می‌گویند.

توضیح: در صورتیکه $y = f(x)$ در بازه I مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(x)$ را مشتق از f می‌گویند.

در حالت خاص اگر $y = x$ باشد داریم $dy = dx = 1 \times dx$ پس $dy = dx$ و $dx = dy$ می‌توان $df = f'(x) dx$ را به کار برد.

$$df = f'(x) dx$$

واضح است که اگر f و g در بازه I مشتق پذیر باشند داریم:

$$d(f+g) = (f+g)' dx = (f' + g') dx = f' dx + g' dx = df + dg$$

$$d(f-g) = (f-g)' dx = (f' - g') dx = f' dx - g' dx = df - dg$$

$$d(f \cdot g) = (f \cdot g)' dx = (f'g + fg') dx = g f' dx + f g' dx = g df + f dg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)' dx = \frac{f'g - fg'}{g^2} dx = \frac{g df - f dg}{g^2} = \frac{1}{g} df - \frac{f}{g^2} dg$$

مشتق مراتب بالاتر

اگر تابع f در بازه I مشتق پذیر باشد در این صورت برای $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x)$ وجود دارد که مشتق n مرتبه از f است.

مثال: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف شود:
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x)$
 $f': I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f'(x)$

۱۴۲ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \rightarrow f^{(n)}$

در همه بحث هایی که برای تابع مطرح می شود برای این تابع نیز مطرح است،

(حد و پیوستگی، مشتق و ...) از همه موضوعات مشتق پذیر است، که اگر مشتق پذیر باشد از آن مشتق داریم. تابع جدیدی که از مشتق f' به نام f'' و پیوستگی آن را f'' مشتق می گیریم. مشتق f'' را f''' می نامیم و به همین ترتیب می توانیم مشتق های بالاتر را تعریف کنیم. مشتق $f^{(n)}$ را $f^{(n+1)}$ می نامیم. مشتق $f^{(n)}$ را $f^{(n+1)}$ می نامیم. مشتق $f^{(n)}$ را $f^{(n+1)}$ می نامیم.

$$y' = \frac{df}{dn} = \frac{dy}{dn}$$

$$y'' = \frac{d^2 f}{dn^2} = \frac{d^2 y}{dn^2}$$

$$d^2 y = d(dy), \quad d^2 f = d(df)$$

$$d^n(y) = d(d^{n-1}y) = y^{(n)} = f^{(n)}(n) = \frac{d^n f}{dn^n} = \frac{d^n y}{dn^n}$$

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

قابل ذکر است که رقیب مشتق تابع را بین دو برابر قرار می دهیم تا بتوانیم استنباط کنیم.

$$f^5 = f \times f \times \dots \times f = f \times f \times f \times f \times f$$

$$f^3 = f \times f \times f$$

$$f^{(3)} = f'''$$

$$f(n) = \sin(n)$$

$$f'(n) = \cos(n)$$

$$f''(n) = -\sin(n)$$

$$f'''(n) = -\cos(n)$$

$$f^{(4)}(n) = \sin(n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n+4)}(n) = f^{(n)}(n)$$

میں سے اس طرح ہر مرتبہ ملحق کرنے کے لئے $y = \sin(n)$ استعمال کرتے ہیں۔
 جو مستطیج راس $y = \cos(n)$ نیز صیغہ ہے۔

$$y = n^4 - 3n^2 + n - 1$$

$$y' = 4n^3 - 6n + 1$$

$$y'' = 12n^2 - 6$$

$$y''' = 24n$$

$$y^{(4)} = 24$$

$$y^{(k)} = 0, \forall k > 5$$

$$\sin^{(126)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$$

$$126 = 31 \times 4 + 2 \Rightarrow \sin^{(126)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^{(n)}(n) = \sin\left(n + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos^{(n)}(n) = \cos\left(n + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\ln(n))^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n^n}$$

$$(a^n)^{(n)} = a^n \times (\ln(a))^n$$

$$(n^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)n^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!} n^{m-n}, \quad 0 \leq n < m$$

تقریباً افرمود مشتقات مرتبہ n ام سوانح زیر اربعین کہیں۔

$$y = \sin(5n)\cos(2n)$$

$$y = \sin(n)\cos(n)$$

$$y = \sin(3n)\cos^2(n)$$

$$y = \ln(n^2 + n - 2)$$

$$y = \frac{an+b}{cn+d} \quad ; \quad y = \frac{a}{c} + \frac{bc+ad}{c(cn+d)}$$

$$y = \frac{n}{n^2-1} \quad ; \quad y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) \quad ; \quad \text{اعمال}$$

نکته: اگر دو در تابع، چند طور می‌تواند n مرتبه مشتق پذیر باشند به راحتی
در یک کسک استقرار اجابت می‌شود

قاعده لایب نیتز
(توضیح: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$)
2. اگر یک قاعده لایب نیتز حساب کنید.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$(n^3 \sin(n))^{(100)} \Big|_{n=\pi}$$

$$(n^3 \sin(n))^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (n^3)^{(k)} \sin(n)^{(100-k)}$$

$$(n^3)' = 3n^2$$

$$(n^3)'' = 6n$$

$$(n^3)''' = 6$$

$$(n^3)^{(k)} = 0 \quad \forall k \geq 4$$

بنابراین برای $k \geq 4$ و $k=0, 1, 2, 3$ در رابطه با n^3 برابر صفر است پس این
فرضیات فقط برای $k=0, 1, 2, 3$ نوشته می‌شود پس

$$\Rightarrow = \sum_{k=0}^3 \binom{100}{k} \times (n^3)^{(k)} \sin(n)^{(100-k)}$$

$$= \binom{100}{0} \times n^3 \times \sin(n)^{(100)} + \binom{100}{1} 3n^2 \times \sin(n)^{(99)} + \binom{100}{2} 6n \times \sin(n)^{(98)} + \binom{100}{3} 6 \times \sin(n)^{(97)}$$

$\sin(\pi) = 0$ $-\cos(\pi) = +1$ $-\sin(\pi) = 0$ $\cos(\pi) = -1$

از طرف
 $\sin(n) = \sin(n)$, $\sin(n) = \sin(n) = \sin(n) = -\cos(n)$

$$\sin(n) = \sin(n) = \sin(n) = -\sin(n)$$

$$\sin(n) = \sin(n) = \sin(n) = \cos(n)$$

$$\Rightarrow (n^3 \sin(n))^{(100)} \Big|_{n=\pi} = \binom{100}{0} 3 \times \pi^2 \times (+1) + \binom{100}{1} 6 \times (-1) =$$

$$100 \times 3 \times \pi^2 + \frac{100!}{3!(97)!} \times (-6) = 300 \pi^2 - 100 \times 99 \times 98 = 300(\pi^2 - 3234)$$

$$(25) \quad (n^2 \sin(n))^{(25)}, \quad (24) \quad (e^n (n^2 - 1))^{(24)}, \quad (e^{an} \sin(bn))^{(n)}$$

$$(e^{-n} \sin(n))^{(111)}, \quad ((1 - n^2) \cos(n))^{(2n)}, \quad \left(\frac{1}{n^2 - 3n + 2}\right)^{(100)}$$

تمرین ۱ بدین محاسبه ضابطه f' و f'' و f''' است $f'(0), f'(1), f'(2), f'(3)$ و $f''(0), f''(1), f''(2), f''(3)$ و $f'''(0), f'''(1), f'''(2), f'''(3)$

$$f(n) = n^2 (n+1)(n-1)^3 (n-2)^2 (n-3)^4$$

(۲) در حالت کلی اگر f تابع مشتق پذیر باشد، تابع f' معمولاً تابع مشتق از f است و لزوماً مشتق پذیر نیست. حتی می‌تواند مشتق پذیر نباشد. توابع زیر در $\mathbb{R}$ مشتق پذیرند و مشتق آنها همین است.

$$y_1 = \begin{cases} n^2 & n \geq 1 \\ 2n-1 & n \leq 1 \end{cases} \quad , \quad y_2 = \begin{cases} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

در تابع y_2 برای $n \neq 0$ داریم

$$y_2' = 2n \sin\left(\frac{1}{n}\right) + n^2 \cos\left(\frac{1}{n}\right) \times \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 2n \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$y_2'(0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 0}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow 0} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

کرانه $n \rightarrow 0$ در حد صفر دارد

$$\Rightarrow y_2' = \begin{cases} 2n \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

در حالت y_2 در $n=0$ حد ندارد و در نتیجه نامرست است و مشتق پذیر نیست.

محاسبه و بررسی y_1 به خواننده واگذار می‌شود.

(۳) عرء. تابع f تابعی ذات مرتبه مشتق پذیر باشد و مشتق مرتبه n داشته باشد. می‌توانیم f از یکلاس C^∞ است و اگر n مرتبه مشتق می‌تواند داشته باشد، می‌توانیم تابع f از یکلاس C^n است.

حیند مثال حل سوده

۱۴۷

مثال ۱ اثر $|f(n)| \leq n^2$ با $f(0) = 0$ و $f'(0)$ را پیدا کنید

حل ۱

$$|f(0)| \leq 0^2 \Rightarrow |f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(n) - f(0)}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(n)}{n}$$

$$|f(n)| \leq n^2 \Rightarrow -n^2 \leq f(n) \leq n^2 \Rightarrow$$

$$n > 0 \quad -n \leq \frac{f(n)}{n} \leq n$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} -n = \lim_{n \rightarrow 0^+} n = 0 \xrightarrow{\text{مقدماتی}} \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{f(n)}{n} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

$$n < 0 \quad -n \geq \frac{f(n)}{n} \geq n$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} -n = \lim_{n \rightarrow 0^-} n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{f(n)}{n} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

مثال ۲ اثر $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ که

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

آنگاه $f(1) = 0$ را ثابت کنید. همچنین f را در $\mathbb{R}^+$ مشتق پذیر بودن را اثبات کنید. $\mathbb{R}^+$ مشتق پذیر است.

$$f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow 2f(1) = f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ \quad f'(c) = \lim_{n \rightarrow c} \frac{f(n) - f(c)}{n - c} = \lim_{n \rightarrow c} \frac{f(\frac{n}{c} \times c) + f(c) - f(c)}{c(\frac{n}{c} - 1)}$$

$$n = \frac{n}{c} \times c \Rightarrow f(n) = f(\frac{n}{c} \times c) = f(\frac{n}{c}) + f(c)$$

$$n - c = c(\frac{n}{c} - 1)$$

$$n \rightarrow c, c \neq 0 \Rightarrow \frac{n}{c} \rightarrow 1$$

۱۴۸

$$\Rightarrow f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f\left(\frac{x}{c}\right)}{c\left(\frac{x}{c} - 1\right)}$$

آرگترادیم $h = \frac{x}{c} \Rightarrow$ این صورت

$$x \rightarrow c \Rightarrow h \rightarrow 1$$

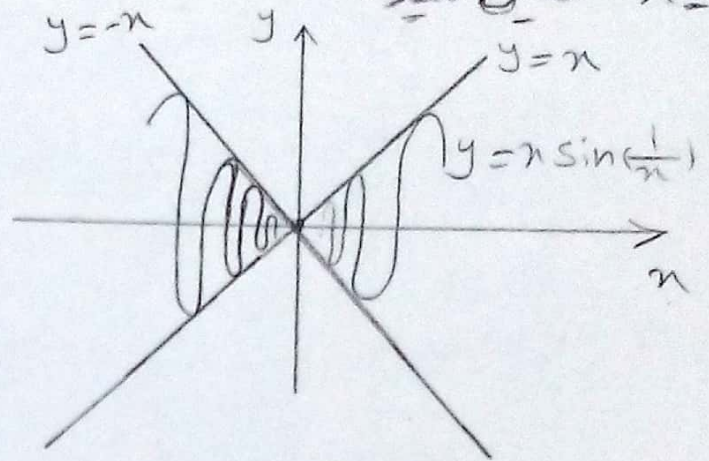
$$\Rightarrow f'(c) = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h)}{c(h-1)} = \frac{1}{c} \times \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h) - f(1)}{h-1} =$$

$$\frac{1}{c} \times f'(1) \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ : f'(c) = \frac{1}{c} \times f'(1)$$

ب f در $\mathbb{R}^+$ مشتق پذیر است.

مثال: در مشتق پذیری و پیوستگی توابع زیر در نقطه $x=0$ تحقیق کنید.

$$* y = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$$

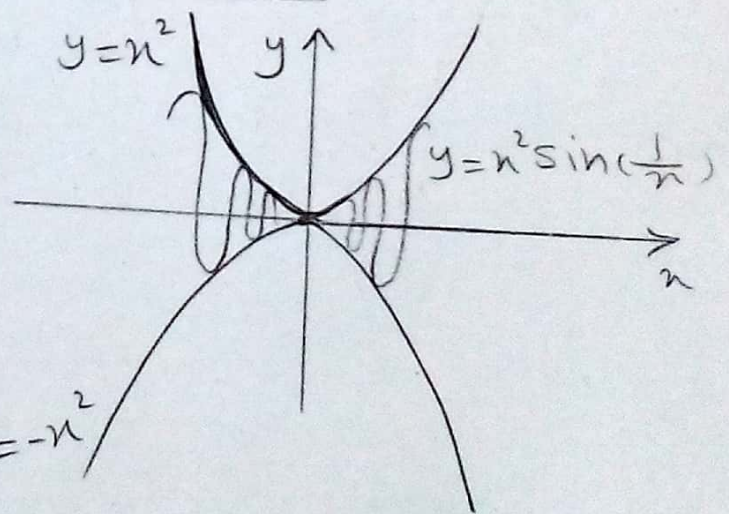
تابع بین نمودار $y = x$ و $y = -x$ در نمودار قرار گرفته است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ در } x=0 \text{ پیوسته است}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

وجود ندارد $\Rightarrow f'$ در $x=0$ موجود نیست.

$$* y = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

تابع بین نمودار $y = x^2$ و $y = -x^2$ قرار گرفته است.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow f \text{ در } x=0 \text{ مشتق پذیر است}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۱۵۰

تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است اما تابع f' روی $\mathbb{R}$ حتی به صورت یکنواخت زیرا $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(n)$ وجود ندارد.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f'(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{وجود ندارد زیرا} \\ &= 0 - \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{وجود ندارد زیرا} \end{aligned}$$